



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a V-a

Problema 1

Determinați numărul de forma $\overline{4abc3}$ care, împărțit la 2016, dă restul 65.

Problema 2

- a) Se știe că $2016 = a^5 \cdot b^2 \cdot c$, $a \neq b \neq c$. Sa se afle a , b , c .
- b) Să se scrie numărul 2016 ca sumă de trei pătrate perfecte.

Problema 3

- a) Să se arate că numărul $x = 2016^{2015} + 2015^{2014} + 2014^{2016}$ nu este pătrat perfect.
- b) Arătați că numărul : $A = 21^n \cdot 126 + 7^{n+1} \cdot 3^{n+4} + 7^{n+2} \cdot 3^{n+3}$ este divizibil cu 2016.

Problema 4

Determinați mulțimile A și B , știind că $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$, $3 \in B \setminus A$, $A \setminus B \not\subseteq \{2, 4\}$, $B \setminus A \not\subseteq \{2, 3\}$ și $A \cap B \neq \emptyset$. Justificați răspunsul.

Notă

- Timp de lucru efectiv 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VI-a

Problema 1

Se consideră suma: $S_n = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

- Calculați suma divizorilor naturali ai numărului S_3 .
- Pentru $n = 99$ arătați că suma se divide cu cel mai mare divizor comun al numerelor 1960 și 6800.

Problema 2

- Să se rezolve ecuația: $9^{2x+1} + 9^{2x} + 9^{2x+2} = 7371$
- De la ce înălțime cade o minge care atinge de 4 ori pământul și de fiecare dată se ridică la o înălțime egală cu jumătatea înălțimii de la care a căzut anterior, iar ultima oară se ridică la 2 m ?

Problema 3

Pe segmentul $[MA]$, astfel încât $[MT] \equiv [AE]$ și $|MA| - |TA| = 1 \text{ cm}$. Dacă P este mijlocul segmentului $[MA]$ și $|TP| = 3,5 \text{ cm}$; arătați că raportul segmentelor $[MP]$ și $[TE]$ este subunitar.

Problema 4

Fie unghiurile $\sphericalangle AOB$ și $\sphericalangle BOC$ adiacente suplementare, astfel încât $m(\sphericalangle BOC) - m(\sphericalangle AOB) = 20^\circ$, (OD este bisectoarea $\sphericalangle AOB$ și (OE este semidreapta opusă lui OD).

- Calculați $m(\sphericalangle EOB)$.
- Demonstrați că $PO \perp DE$, unde (OP este bisectoarea $\sphericalangle BOC$).

Notă

- Timp de lucru efectiv 2 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VII-a

Problema 1.

- a) Stabiliți dacă numărul \sqrt{a} este real, unde $a = \left(-\frac{7}{8}\right) : 0,125 + \left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$
b) Determinați a 2016-a zecimală a numărului b, unde $b = 0,12122122212222\dots$

Problema 2.

Fie $A_n = \sqrt{1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{2^3} - \dots - \frac{1}{2^n}}$, $n \in \mathbb{N}$.

- a) Calculați $2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1$
b) Arătați că $A_2 + A_4 + A_6 + \dots + A_{2016} \in \mathbb{Q}$.

Problema 3.

Fie paralelogramul ABCD cu $[AD] \equiv [DB]$, punctul E simetricul lui C față de B și punctul F simetricul lui E față de A. Arătați că:

- a) $DE \perp CD$
b) punctele C, D, F sunt coliniare.

Problema 4

Fie ABC un triunghi oarecare, iar M și D mijloacele segmentelor $[AB]$, respectiv $[BC]$. Dacă $E \in (AD)$ astfel încât $AD = 4 \cdot ED$, iar $\{N\} = ME \cap BC$, să se demonstreze că :

- a) $[ME] \equiv [EN]$
b) $[DN] \equiv [NC]$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VIII-a

Problema 1.

a) Arătați că $x = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}}\right) \cdot (\sqrt{2016}+1)$ este număr natural.

b) Arătați că $(a^2 + 1) \cdot (b^2 + 1) \geq 2 \cdot (ab - 1) \cdot (a + b)$, oricare ar fi a și b numere naturale.

Problema 2.

a) Determinați numerele naturale x , y , z pentru care

$$x + y + z - 21 = 2\sqrt{x-4} + 4\sqrt{y-9} + 6\sqrt{z-22}.$$

SGM 11/2014

b) Să se afle x și y astfel încât

$$\sqrt{x^2 - 4x + 4000004} + \sqrt{y^2 - 6y + 265} = 2016.$$

Problema 3.

O cameră în formă de paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' are dimensiunile AB = 2m, BC = 3 m , AA' = 2,4 m , iar N este mijlocul lui [CC']. În punctele D' , A și N se prinde o prelată care are forma triunghiului D'AN.

a) Să se verifice dacă prelatea reprezintă $\Delta D'AN$ dreptunghic.

b) Să se afle distanța de la punctul D' la dreapta de intersecție dintre planul prelatei și planul podelei (ABC).

Problema 4.

În paralelipipedul dreptunghic ABCDA'B'C'D' cu AB = $12\sqrt{3}$ cm, BC = 12 cm , AA' = 18 cm se consideră pe muchia [A'B'] punctul N , astfel încât $A'N = 3 \cdot B'N$, $P \in (AA')$ și $M \in [BC]$ triunghiul MNP să fie dreptunghic în N.

a) Demonstrați că $PN \perp BN$.

b) Determinați lungimea AP.

(Gazeta Matematică)

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a V-a
Soluții și bareme

1. $\overline{4abc3} = 2016 \cdot x + 65$ 2p
 $49993 : 2016 < 25$; $20003 : 2016 > 20$ 2p
 $20 < c < 25$ 1p
 $u(2016 \cdot x + 65) = 3 \Rightarrow x = 23$ 1p
 $\overline{4abc3} = 2016 \cdot 23 + 65 = 46433$ 1p
2. a) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ 3p
b) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7 = 2016 = 2^4 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 2 = 12^2 \cdot 14 =$
 $= 12^2 \cdot (3^2 + 2^2 + 1^2) = 12^2 \cdot 3^2 + 12^2 \cdot 2^2 + 12^2 \cdot 1^2 =$
 $= (12 \cdot 3)^2 + (12 \cdot 2)^2 + (12 \cdot 1)^2 = 36^2 + 24^2 + 12^2$ 4p
3. a) $u(2016^{2015}) = 6$, $u(2015^{2014}) = 5$, $u(2014^{2016}) = 6$
 $u(x) = u[u(2016^{2015}) + u(2015^{2014}) + u(2014^{2016})] = 7$ 2p
Dacă ultima cifră a unui număr este 2 , 3 , 7 sau 8 ,
atunci numărul sigur nu este pătrat perfect1p
b) $A = 21^n \cdot 126 + 7^n \cdot 7 \cdot 3^n \cdot 3^4 + 7^n \cdot 7^2 \cdot 3^n \cdot 3^3 =$ 1p
 $= 21^n(126 + 7 \cdot 81 + 49 \cdot 27) = 21^n \cdot 2016.$ 2p
A divizibil cu 2016. 1p
4. $3 \in B \setminus A \Rightarrow 3 \in B$ și $3 \notin A.$ 2p
 $(A \setminus B) \not\subset \{2, 4\} \Rightarrow$ există cel puțin un element
 $x \in (A \setminus B)$ și $x \notin \{2, 4\}$, $x \in A$ și $x \notin B.$
 $x = 1 \in A$ și $1 \notin B.$ 1p
 $(B \setminus A) \not\subset \{2, 3\} \Rightarrow$ există cel puțin un element y astfel încât $y \in (B \setminus A)$
și $y \notin \{2, 3\}.$
 $y = 4 \in B$ și $4 \notin A.$ 1p
 $A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow 2 \in A$ și $2 \in B.$ 2p
 $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 3, 4\}.$ 1p

Observatie. Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.



INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Națională de Matematică

Etapa locală -20.02.2016

Clasa a VI-a

Soluții și bareme

Problema 1

a) 4 puncte

1p scrierea sumei $S_3 = 1 + 3 + 3^2 + 3^3$

1p calcul $S_3 = 40$

1p scrierea tuturor divizorilor lui 40

1p calculul sumei $1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 20 + 40 = 90$

b) 3 puncte

1p $S_{99} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{96} + 3^{97} + 3^{98} + 3^{99}$

$$S_{99} = 40 \cdot (1 + 3^4 + \dots + 3^{96}) : 40$$

1p $(1960; 6800) = 40$

1p S_{99} are 100 de termeni; $100 : 4 \Rightarrow$ se pot forma grupe de câte 4 termeni.

Problema 2

a) 4 puncte

1p $9^{2x} \cdot 9^1 + 9^{2x} + 9^{2x} \cdot 9^2 = 7371;$

1p $9^{2x} \cdot (9^1 + 1 + 9^2) = 7371 \Rightarrow 9^{2x} = 7371 : 91$

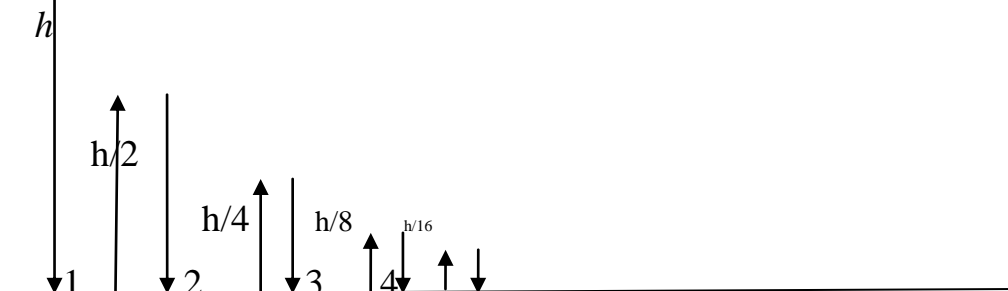
1p $9^{2x} = 81 \Rightarrow 9^{2x} = 9^2$

1p $2x = 2 \Rightarrow x = 1$

b) 3 puncte

$$h = 2^5$$

$$h = 32$$





INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Problema 3

1p desen realizat corect

1p $[MT] \equiv [AE]$ și $|MA| - |TA| = 1 \text{ cm} \Rightarrow |MT| = |EA| = 1 \text{ cm}$

1p P mijlocul $[MA] \Rightarrow |MP| = |PA| = |MT| + |TP| = 1 \text{ cm} + 3,5 \text{ cm} = 4,5 \text{ cm}$;.

1p $|PE| = |PA| - |EA| = 4,5 \text{ cm} - 1 \text{ cm} = 3,5 \text{ cm}$

1p $|TE| = 7 \text{ cm}$

1p finalizare

Problema 4

a) 4 puncte

1p desen realizat corect

1p $m(\sphericalangle BOC) = 100^0$; $m(\sphericalangle AOC) = 180^0$

1p $m(\sphericalangle AOB) = 80^0$

1p $m(\sphericalangle EOB) = 140^0$

a) 3 puncte

1p pentru aflarea $m(\sphericalangle BOP) = 50^0$

1p pentru aflarea $m(\sphericalangle POD) = 90^0$

1p finalizare $PO \perp DE$

Observatie. Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VII-a
Soluții și bareme
Subiectul 1.
a) (4 puncte)

$$a = -\frac{3}{4} \dots\dots\dots 3p$$

 $a < 0$, deci nu există \sqrt{a} 1p

b) (3 puncte)

 Însușind zecimalele astfel încât să ne apropiem de numărul 2016 și observând că $1+2+3+\dots+63=2016$, deducem că pentru 63 cifre de 1 se adaugă 2016 cifre de 2, deci ar trebui să avem 62 de 1, ceea ce ar însemna $62 + 62 \cdot 63 : 2$ zecimale, adică 2015 în total (cifre de 1 și de 2).....2p

$$b = 1 \underbrace{2}_1 1 \underbrace{22}_2 1 \underbrace{222}_3 1 \dots\dots 1 \underbrace{22 \dots 21}_{62} \dots$$

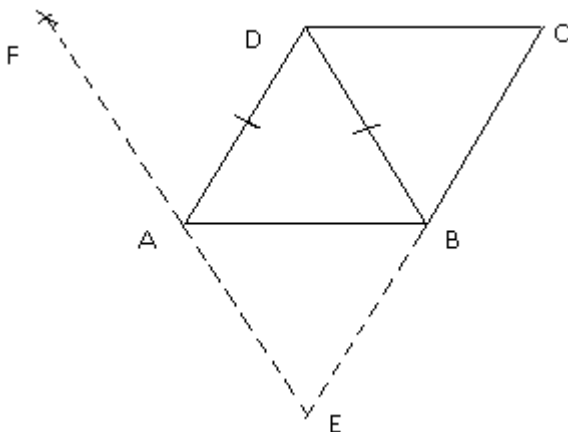
Prin urmare, a 2016-a zecimală va fi 1.....1p

Subiectul 2.

a) $2^5 - 2^4 - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 2^4(2-1) - 2^3 - 2^2 - 2 - 1 = 2^3(2-1) - 4 - 2 - 1 = 1$3p

 b) Aducând la același numitor fracțiile de sub radical se obține rezultatul $1/2^n$ 2p

 Pentru n număr par, A_n reprezintă un număr rațional, deci fiecare termen al sumei este rațional, așadar $A_2 + A_4 + A_6 + \dots + A_{2016} \in \mathbb{Q}$ 2p

Subiectul 3.

 a) ABCD fiind paralelogram rezultă $AD \parallel BC$ și $[AD] \equiv [BC]$, iar din simetria punctelor E și C față de B obținem $[BE] \equiv [BC]$, de unde rezultă $[AD] \equiv [BE]$ și cum $AD \parallel BE$, patrulaterul ADBE va fi paralelogram2p

INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

Cum $[AD] \equiv [DB]$ din ipoteză, deducem că $ADBE$ este romb, deci $DE \perp AB$**1p**

Dar $AB \parallel DC$, deci $DE \perp CD$**1p**

b) Din $ADEB$ romb $\Rightarrow DB \parallel AE$ și $[DB] \equiv [AE]$ (1)

Cum $F = \text{sim}_A E \Rightarrow [AF] \equiv [AE]$ și $F \in AB$ (2)**1p**

Din (1) și (2) se obține $DB \parallel AF$ și $[DB] \equiv [AF]$, deci $ABDF$ este paralelogram

$\Rightarrow FD \parallel AB$**1p**

Prin punctul D , exterior dreptei AB , trec dreptele $DC \parallel AB$ ($ABCD$ este paralelogram) și $DF \parallel AB$ ($ABDF$ paralelogram). Conform axiomei lui Euclid, prin D trece o singură paralelă la AB , deci dreptele DC și DF coincid, așadar punctele C, D, F sunt coliniare....**1p**

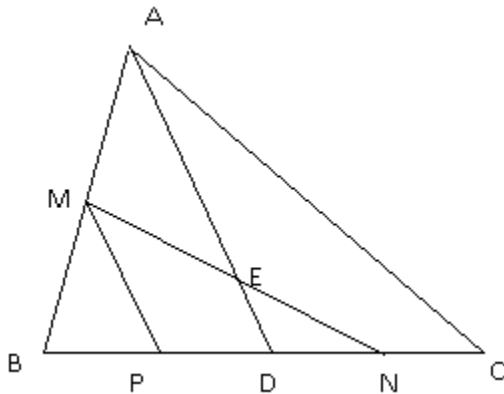
Subiectul 4.

a) Fie P mijlocul lui $[BD]$. În $\triangle ABD$, $[MP]$ este linie mijlocie, deci $MP \parallel AD$

și $MP = AD/2$**2p**

Cum $ED = AD/4$, rezultă $ED = MP/2$ și din $ED \parallel MP$, deducem că $[ED]$ este linie mijlocie în triunghiul MNP**1p**

Atunci E este mijlocul lui $[MN] \Rightarrow [ME] \equiv [EN]$**1p**



b) $[ED]$ este linie mijlocie în $\triangle MPN \Rightarrow [PD] \equiv [DN]$**1p**

$PD = BD/2 = DC/2$, deci $DN = DC/2$**1p**

Rezultă că N este mijlocul lui $[DC]$, deci $[DN] \equiv [NC]$**1p**

Observatie. Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a VIII-a
Soluții și bareme

1. a) $x = \left(\frac{1}{1+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{2015}+\sqrt{2016}} \right) \cdot (\sqrt{2016}+1) =$
 $= (\sqrt{2016}-1)(\sqrt{2016}+1) = 2015 \in \mathbb{N}$ 3p
- b) $(a^2+1) \cdot (b^2+1) = a^2b^2 + a^2 + b^2 + 1 = (ab-1)^2 + (a+b)^2 \geq$
 $\geq 2\sqrt{(ab-1)^2(a+b)^2} = 2(ab-1)(a+b).$ 4p
2. a) $(\sqrt{x-4}-1)^2 + (\sqrt{y-4}-2)^2 + (\sqrt{z-22}-3)^2 = 0.$2p
 finalizare 1p
- b) $(\sqrt{x^2-4x+4+200^2} + \sqrt{y^2-6y+9+16^2} = 2016$ 2p
 $(\sqrt{(x-2)^2+200^2} + \sqrt{(y-3)^2+16^2} = 2016$ 1p
 finalizare1p
3. a) Se calculează laturile și se demonstrează că Δ nu este dr. 3p
 b) Aflarea dreptei de intersecție 2p
 Calculul distanței. 2p
4. a) $BC \perp (ABB')$, $PN \subset (ABB') \Rightarrow BC \perp PN$
 $PN \perp BC$, $PN \perp MN \Rightarrow PN \perp (BMN) \Rightarrow PN \perp BN.$ 4p
- b) $\Delta PNB = \Delta dr.$ Not: $AP = x.$ $(18-x)^2 + 243 + 351 = x^2 + 432.$ 2p
 $AP = 13,5\text{cm}.$ 1p

Observatie. Se puncteaza corespunzator orice alta metoda corecta.