Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M_1
Soluții și bareme

Problema 1

Aplicăm inegalitatea mediilor:

$\sqrt{6a-1}=\sqrt{1(6a-1)}\le\dfrac{1+6a-1}{2}=3a$ …………………………………………………………**2p**

$\sqrt{6b-1}=\sqrt{1(6b-1)}\le\dfrac{1+6b-1}{2}=3b$ …………………………………………….……………**2p**

$\sqrt{6c-1}=\sqrt{1(6c-1)}\le\dfrac{1+6c-1}{2}=3c$ …………………………..……….…………………**2p**

Prin sumarea relațiilor de mai sus se obtine inegalitatea din enunț pt că $3(a+b+c)=3$ …..**1p**

Problema 2

Deoarece $MS\ge 0\Rightarrow MD\ge 0\Rightarrow x\ge 2016$ ……………………………………..……….…**2p**

$x-1>0, x-2>0,\ldots, x-2015>0, (\forall)x\ge 2016$ …………………………………….…….…**1p**

Ecuația devine: $2015x-(1+\ldots+2015)=2016x-2016^2$ ………………………………. …. **2p**

$x=1008\cdot 2017$ …………………………………………………………………..…….…….**2p**

Problema 3

a) $\dfrac{AN}{NC}=\dfrac{3}{2}$ ……………………………………………………………………………..…**1p**

$\overrightarrow{BN}=\dfrac{2}{5}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ ……………………………………………………………….…..…..**2p**

b) $\overrightarrow{MN}=-\dfrac{7}{20}\overrightarrow{BA}+\dfrac{3}{5}\overrightarrow{BC}$ ……………………………………………………………...….**1p**

$\overrightarrow{MP}=-\dfrac{3}{4}\overrightarrow{BA}+\dfrac{9}{7}\overrightarrow{BC}$ ……………………………………………………………..…**2p**

Deci, $\overrightarrow{MN}=\dfrac{7}{15}\overrightarrow{MP}\Rightarrow M,N,P$ coliniare……………………………………………..…..**1p**

Problema 4

Etapa de verificare P(1) adevărat…………………………………………………….….**1p**

Scriere corectă $P(n)\to P(n+1)$ ……………………………………………….... ….**1p**

Etapa de demonstrație ……………………..………………………………………...…….**5p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a X-a M_1
Soluții și bareme

Problema 1

f inj $\Leftrightarrow (\forall) x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$ ……………………………………………………**1p**

$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow 2([x_1]-[x_2]) = \{x_1\}-\{x_2\} \Rightarrow (\{x_1\}-\{x_2\}) \in \mathbb{Z}$ **(1)**……………………………………**2p**

Dar , $-1 < \{x_1\}-\{x_2\} < 1 \Rightarrow \{x_1\}-\{x_2\} = 0 \Rightarrow \{x_1\} = \{x_2\}$ ……………………………………………**2p**

Din (1)$\Rightarrow [x_1] = [x_2]$(2)……………………………………………………………………………**1p**

Din (1) și (2) $\Rightarrow x_1 = [x_1]+\{x_1\} = [x_2]+\{x_2\} = x_2$ ……………………………………………………**1p**

Problema 2

$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$ (1)……………………………………………………………………………**1p**

$z_i \cdot \overline{z_i} = |z_i|^2 = 1 \Rightarrow \overline{z_i} = \dfrac{1}{z_i}, (\forall) i = \overline{1,3}$ ………………………………………………………**2p**

$$\overline{z} = \frac{\overline{z_1}+\overline{z_2}+\overline{z_3}+\overline{z_1}\,\overline{z_2}+\overline{z_1}\,\overline{z_3}+\overline{z_2}\,\overline{z_3}}{1+\overline{z_1}\,\overline{z_2}\,\overline{z_3}} = \frac{\frac{1}{z_1}+\frac{1}{z_2}+\frac{1}{z_3}+\frac{1}{z_1z_2}+\frac{1}{z_1z_3}+\frac{1}{z_2z_3}}{1+\frac{1}{z_1z_2z_3}} = z \Rightarrow z \in \mathbb{R}$$ ……………………**4p**

Problema 3

a)Utilizând formula de schimbare a bazei $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \cdot \ldots \cdot \log_{a_n} a_1 = \log_{a_1} a_1 = 1$………**3p**

b) $\log_{a_1} a_2, ..., \log_{a_n} a_1 \geq 0$ ……………………………………………………………………**1p**

Aplicăm inegalitatea mediilor și reziultatul de la punctul a)

$$\frac{\frac{1}{\log_{a_1} a_2}+\frac{1}{\log_{a_2} a_3}+\ldots+\frac{1}{\log_{a_n} a_1}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{\log_{a_1} a_2}\cdot\frac{1}{\log_{a_2} a_3}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{\log_{a_n} a_1}} = 1$$ ……………………………………………**3p**

Problema 4

CE : $x \in [1,3]$……………………………………………………………………………………**1p**

$x \geq 1 \Rightarrow x+1 \geq 2 \Rightarrow 2^{x+1} \geq 2^2 = 4$ **(1)**…………………………………………………………………**1p**

$x \geq 1 \Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow 4^{x-1} \geq 4^0 = 1$**(2)**……………………………………………………………………**1p**

$\sqrt{-x^2+4x-3} \geq 0$ **(3)**………………………………………………………………………………**1p**

Prin însumarea relațiilor 1-3$\Rightarrow MS \geq 5 (\forall) x \in [1,3]$, cu egalitate doar pt $x = 1$, soluție unică………**3p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XI-a M_1
Soluții și bareme

Problema 1

a) $A_{\Delta OA_nA_{n+1}} = \frac{1}{2}\left(n^2+3n\right)$ ……………………………………………………………………………3p

b) $f(n) = \frac{1}{2}\left(n^2+3n\right), (\forall) n \in \mathbb{N}^*$**,** funcție strict crescătoare $\Rightarrow f_{\min} = f(1) = 2$ ……………………..4p

Problema 2

$\left\{\sqrt{n^2+n+1}\right\} = \sqrt{n^2+n+1} - \left[\sqrt{n^2+n+1}\right]$ ………………………………………………...………1p

Demonstrarea relației : $n \le \sqrt{n^2+n+1} < n+1, (\forall) n \in \mathbb{N} \Rightarrow \left[\sqrt{n^2+n+1}\right] = n$ ………………….………3p

$\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\sqrt{n^2+n+1}\right\} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+n+1}-n\right) = \frac{1}{2}$ …………………………………………………………3p

Problema 3

a) $AB = BA = O_3$ ………………………………………………………………………….………………3p

b) Deoarece A și B comută, aplicând formula Binomului lui Newton, toți termenii dezvoltării, cu excepția primului și a ultimului sunt egali cu O_3, de unde relația cerută……………………………**4p**

Problema 4

$x_1 > 0 \Rightarrow x_n > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………………………………..1p

$x_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{\left(x_n - \sqrt{a}\right)^2}{2x_n} > 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow x_n > \sqrt{a}, (\forall) n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………1p

$x_{n+1} - x_n = \frac{a - x_n^2}{2x_n} < 0, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_n$ șir descrescător(1)..……………………………………………1p

$\sqrt{a} \le x_n \le x_1, (\forall) n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow (x_n)_n$ mărginit (2)...1p

Din (1) și (2), teo Weierstrass $\Rightarrow (x_n)_n$ convergent $\Rightarrow \exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = l \in \mathbb{R}$ și cum $x_n \ge \sqrt{a} > 0 \Rightarrow l \ge 0$ 1p

Trecînd la limită în relația de recurență $l_1 = -\sqrt{a} < 0$, nu convine și $l_2 = \sqrt{a} > 0$ convine $\Rightarrow l = \sqrt{a}$ …...2p

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M_1
Soluții și bareme

Problema 1

Fie $C(x)$ - câtul, iar $R(x)=ax+b$ - restul împărţirii numărătorului la numitor.

$C(x)$ şi $R(x)$ au coeficienţi raţionali .

Are loc egalitatea $(1+x)^{2009}+(1-x)^{2009}=\left(1+x^2\right)\cdot C(x)+ax+b$, oricare ar fi x număr complex .... **1p.**

În particular, pentru $x=i$ obţinem: $(1+i)^{2009}+(1-i)^{2009}=ai+b$ .... **1p.**

Astfel, obţinem $a=0$, $b=2^{1005}$. .... **2p.**

Atunci $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2009}+(1-x)^{2009}}{1+x^2}dx=\int_0^1 C(x)dx+2^{1005}\cdot\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\int_0^1 C(x)dx+2^{1003}\pi$. .... **2p.**

$C(x)$ are coeficienţi raţionali, deci $\int_0^1 C(x)dx\in Q$, dar $2^{1003}\pi\in R\setminus Q$, atunci valoarea integralei $\in R\setminus Q$.**1p.**

Problema 2

$I+J=x+C$ **2p**

$I-J=\ln\left(e^x+8x^2+4x+4\right)+C$ **3p**

$I=\frac{1}{2}\left(x+\ln\left(e^x+8x^2+4x+4\right)\right)+C$ **1p**

$J=\frac{1}{2}\left(x-\ln\left(e^x+8x^2+4x+4\right)\right)+C$ **1p**

Problema 3

a) - verificare prin calcul a axiomelor grupului..**4p**

b) determinarea f(x) = $\frac{-1}{2a}\ln\frac{a-x}{a+x}$ **1p**

-bijectivitate...**1p**

-morfism..**1p**

Problema 4

a) $A^T\cdot A=I_2 \Rightarrow \det A^T\cdot\det A=1$, dar $\det A^T=\det A \Rightarrow (\det A)^2=1\Rightarrow \det A=\pm 1$ **4p**

b) 1) $\forall A,B\in H\Rightarrow A\cdot B\in H$, adică $(AB)^T(AB)=I_2$

$(AB)^T(AB)=(B^T A^T)(AB)=B^T(A^TA)B=B^T I_2 B=B^TB=I_2$..**2p**

2) $\forall A\in H\Rightarrow A^{-1}\in H$, adică $(A^{-1})^TA^{-1}=I_2$ **1p**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M$_2$
Soluţii şi bareme

Problema 1

Notăm $|x-y|=a, |x+1|=b$, sistemul devine $\begin{cases} 2a+3b=7 \\ 3a+2b=8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases}$ **...3p**

revenind la notaţie $\begin{cases} |x+1|=1 \\ |x-y|=2 \end{cases}$ cu soluţiile $\{(-2,-4),(-2,0),(0,2),(0,-2)\}$ **..4p**.

Problema 2

a) $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice $\Leftrightarrow \sqrt{13}=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{13}=\sqrt{5}+\sqrt{21} \Leftrightarrow 4\cdot 13=5+21+2\sqrt{105} \Leftrightarrow \underbrace{26}_{\in\mathbb{Q}}=\underbrace{2\sqrt{105}}_{\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$, fals, deci $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ nu pot fi termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice**..3p**.

b) $a_n=S_n-S_{n-1}=5n^2+6n-5(n-1)^2-6(n-1)=\cancel{5n^2}+\cancel{6n}-\cancel{5n^2}+10n-5-\cancel{6n}+6=10n+1,\ \forall n\in\mathbb{N}^*$, deci $(a_n)_n$ este o progresie aritmetică cu primul termen 11 şi raţia 10**. 4p**

Problema 3

a) Afirmaţia este falsă, pentru $n=41$, numărul obţinut este divizibil cu 41. **..3p**

b) Verificare **...1p**

pasul de inducţie **...3p**.

Problema 4

Desen **(1p)**, $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ **(3p)** de unde $\overrightarrow{AF}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ **(2p)**, finalizare**(1p)**

Olimpiada Naţională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa aX-a M_2
Soluţii şi bareme

Problema 1

a) $p=2\in\mathbb{N}, q=5\in\mathbb{N}$ **4p**

b) $A=\dfrac{(\log_2 x)^2}{2}+\dfrac{(\log_2 x)^2}{6}-\dfrac{2}{3(\log_x 2)^2}=0, \forall x\in(0,\infty)$ **3p**

Problema 2

a) $z=5+4m-3mi-2+mi=(3+4m)-2mi\in\mathbb{R} \Leftrightarrow 2m=0\Leftrightarrow m=0$ **3p**

b) Fie $z=a+bi, a,b\in\mathbb{R} \Rightarrow \overline{z}=a-bi$ **1p**

ecuaţia devine:

$a+(-b+7)i=6a+6bi \Leftrightarrow \begin{cases} a=6a \\ -b+7=6b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases}$, deci $z=i$ **3p**

Problema 3

a) $(g\circ f)(x)=(2m+1)(-3x+9)+3=(-6m-3)x+18m+12=x, \forall x\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} -6m-3=1 \\ 18m+12=0 \end{cases} \Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$.(**2p**)

pentru $m=-\dfrac{2}{3}\Rightarrow g(x)=-\dfrac{x}{3}+3$ şi $(f\circ g)(x)=-3\left(-\dfrac{x}{3}+3\right)+9=x, \forall x\in\mathbb{R}$ ....**2p**.

b) $f(4)+f(2)=20\Rightarrow 4^n+2^n=20\Rightarrow n=2$, deci $f(x)=x^2$. **3p**

Problema 4

a) $\sqrt{2p+6}=4\Rightarrow p=5\Rightarrow \sqrt[3]{5p+2}=\sqrt[3]{27}=3\in\mathbb{N}$ **3p**

b) Notez $\begin{cases} a=\sqrt[3]{x-3}\Rightarrow a^3=x-3 \\ b=\sqrt[3]{11-x}\Rightarrow b^3=11-x \end{cases} \Rightarrow a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=8$, ...**2p**

în plus, $a+b=2$, de unde $\begin{cases} a+b=2 \\ a^2-ab+b^2=4 \end{cases} \Rightarrow ab=0$, deci $\begin{cases} a=0, b=2\Rightarrow x=3 \\ b=0, a=2\Rightarrow x=11 \end{cases}$. $S=\{3,11\}$ **2p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală -20.02.2016

Clasa a XI-a M$_2$

Soluţii şi bareme

Problema 1

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-ax-b\right)=\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-a-\frac{b}{x}\right)=\begin{cases}-\infty, \text{dacă } a>1\\ +\infty, \text{dacă } a<1\end{cases}$, deci putem avea doar $a=1$ **...........3p**

Pentru $a=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\left[\sqrt{x^2+x+1}-(x+b)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}-2bx-b^2}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+b)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(1-2b)+(1-b^2)}{\sqrt{x^2+x+1}+(x+b)}=$

$=\frac{1-2b}{2}=\frac{3}{2}\Rightarrow b=-1$**...4p**

Problema 2

Dacă notăm cu r raţia progresiei aritmetice, avem: $\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ a_4 & a_5 & a_6\\ a_1 & a_1 & a_1\end{vmatrix}\overset{L_2\to L_2-L_1}{=}\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 3r & 3r & 3r\\ a_1 & a_1 & a_1\end{vmatrix}=3r\cdot a_1\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=0$

(determinantul are 2 linii identice). ....**3p+4p**

Problema 3

a) $a=1, b=2$ **..4p**

b) Pentru $a=1, b=2$ $D=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $y=x-2$ este asimptotă oblică la $-\infty$ şi la $+\infty$, deci nu avem asimptote orizontale, **...1p**

în plus $x=-1$ este asimptotă verticală. **...2p**

Problema 4

a) $A^2(1)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, A^3(1)=\begin{pmatrix}1 & 3 & 6\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **...3p**

b) $C^{-1}=\left(A(1)\right)^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ **...4p**

Olimpiada Naţională de Matematică

Etapa locală -20.02.2016

Clasa a XII-a M_2

Soluţii şi bareme

Problema 1

a) Fie $\left.\begin{array}{l} a\in M \Rightarrow e^a>1 \\ b\in M\Rightarrow e^b>1\end{array}\right\} \Rightarrow e^a+e^b-1>1 \Rightarrow \ln\left(e^a+e^b-1\right)>0 \Rightarrow a\circ b\in M$. **...3p**

b) $"\circ"$ asociativă $\Leftrightarrow (a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c), \forall a,b,c\in M \Leftrightarrow \left[\ln\left(e^a+e^b-1\right)\right]\circ c = a\circ\left[\ln\left(e^b+e^c-1\right)\right] \Leftrightarrow$

$\ln\left(e^{\ln\left(e^a+e^b-1\right)}+e^c-1\right) = \ln\left(e^a+e^{\ln\left(e^b+e^c-1\right)}-1\right) \Leftrightarrow \ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right) = \ln\left(e^a+e^b+e^c-2\right)$ adevăratpentru

$\forall a,b,c\in M$ **..4p**

Problema 2

$"\cdot"$ lege pe G **(2p)**, comutativitate **(1p)**, asociativitate **(1p)**, element neutru **(1p)**, toate elementele simetrizabile **(2p)**.

Problema 3

a) $I_1=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 2$ **...2p**

$I_2=\int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1}dx = \int_0^1\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \left(x-\operatorname{arctg} x\right)\Big|_0^1 = 1-\frac{\pi}{4}$ **..2p**

b) $I_{n+2}+I_n = \int_0^1 \frac{x^n\cancel{\left(x^2+1\right)}}{\cancel{x^2+1}}dx = \frac{1}{n+1},\ \forall n\in\mathbb{N}^*$ **...3p**

Problema 4

a) F primitivă $\Rightarrow F$ derivabilă $\Rightarrow F$ continuă $\Rightarrow F$ continuă în $x_0=1 \Rightarrow a+2=b-2$ **........................1p**.

În plus, $F'(x)=\begin{cases} 2x+a, x<1 \\ 3x^2+2x-4, x>1\end{cases}$ şi F derivabilă în $x_0=1 \Leftrightarrow F_s'(1)=F_d'(1) \Leftrightarrow a+2=1 \Leftrightarrow a=-1$.

Deci $a=-1, b=3$ **...2p**.

Verificarea pentru valorile obţinute **..1p**

b) $f(x)=\begin{cases} 2x-1, x\le 1 \\ 3x^2+2x-4, x>1\end{cases}$ **..3p**