



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M₁

Problema 1

Fie $a, b, c \in \left[\frac{1}{6}, \infty\right)$ și $a+b+c=1$.

Să se arate că $\sqrt{6a-1} + \sqrt{6b-1} + \sqrt{6c-1} \leq 3$.

Problema 2

Să se rezolve ecuația: $|x-1| + |x-2| + \dots + |x-2015| = 2016(x-2016)$.

Problema 3

În ΔABC se consideră punctele M, N și P pe laturile AB, AC respectiv BC astfel încât

$$\overrightarrow{MA} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{MB}, \quad \overrightarrow{NC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{NA}, \quad \overrightarrow{PC} = \frac{2}{9}\overrightarrow{PB}.$$

- a) Exprimați \overrightarrow{BN} în funcție de \overrightarrow{BA} și \overrightarrow{BC}
- b) Arătați că punctele M, N și P sunt coliniare

Problema 4

Arătați că:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+n}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a X-a M₁

Problema 1

Arătați că funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2[x] + \{x\}$ este injectivă, unde $[x], \{x\}$ reprezintă partea întreagă, respectiv partea fracționară a numărului real x .

Problema 2

Fie $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$, cu $|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$ și $z_1 z_2 z_3 \neq -1$. Să se arate că:

$$z = \frac{z_1 + z_2 + z_3 + z_1 z_2 + z_1 z_3 + z_2 z_3}{1 + z_1 z_2 z_3} \in \mathbb{R}$$

Problema 3

a). Să se verifice egalitatea: $\log_{a_1} a_2 \cdot \log_{a_2} a_3 \cdot \log_{a_3} a_4 \cdot \dots \cdot \log_{a_n} a_1 = 1$, unde $a_i \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $i = \overline{1, n}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$

b). Să se demonstreze că: $\frac{1}{\log_{a_1} a_2} + \frac{1}{\log_{a_2} a_3} + \dots + \frac{1}{\log_{a_n} a_1} \geq n$, unde $a_1, a_2, \dots, a_n \in (0, 1)$ sau $a_1, a_2, \dots, a_n \in (1, \infty)$.

Problema 4

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația: $\sqrt{-x^2 + 4x - 3} + 2^{x+1} + 4^{x-1} = 5$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XI-a M₁

Problema 1

În sistemul cartezian de coordonate xOy se consideră punctele $A_n(n+1, n^2+1)$, $n \in \mathbb{N}$ și $O(0,0)$.

a) Calculați aria triunghiului OA_nA_{n+1} .

b) Notăm cu $f(n)$ aria triunghiului OA_nA_{n+1} . Să se determine $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $f(n)$ este minimă.

Problema 2

Să se calculeze $\lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \sqrt{n^2 + n + 1} \right\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a numărului real x .

Problema 3

Fie $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \end{pmatrix}$ și $B = \begin{pmatrix} 1 & -a & -1 \\ -a & a^2 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$.

a) Calculați AB și BA .

b) Arătați că $(A+B)^n = A^n + B^n$, $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ și $(\forall)a \in \mathbb{R}$.

Problema 4

Să se studieze monotonia și mărginirea șirului $(x_n)_n$, definit prin:

$$x_1 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right), \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad a > 0 \quad \text{și să se determine limita șirului (dacă aceasta există).}$$

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M₁

Problema 1

Arătați că valoarea integralei $\int_0^1 \frac{(1+x)^{2009} + (1-x)^{2009}}{1+x^2} dx$ este un număr irațional.

Problema 2

Să se calculeze integralele $I = \int \frac{e^x + 4x^2 + 10x + 4}{e^x + 8x^2 + 4x + 4} dx$ și $J = \int \frac{4x^2 - 6x}{e^x + 8x^2 + 4x + 4} dx$.

Problema 3

Fie $a > 0$ și $G = (-a, a)$. Pe G se definește legea de compoziție $x * y = \frac{a^2 \cdot (x + y)}{a^2 + xy}$.

a) Arătați că $(G, *)$ este grup abelian.

b) Se definește funcția $f: G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = F(x) - F(0)$, $(\forall) x \in G$, unde F este primitiva a funcției

$g: G \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{a^2 - x^2}$, $(\forall) x \in G$. Demonstrați că f este izomorfism între grupurile $(G, *)$ și $(\mathbb{R}, +)$.

Problema 4

Fie $H = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \mid A^t \cdot A = I_2\}$, unde A^t este transpusa matricei A . Demonstrați că :

a) $(\forall) A \in H \Rightarrow \det A \in \{-1, 1\}$.

b) (H, \cdot) este subgrup al grupului (M, \cdot) , unde $M = \{X \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det X \neq 0\}$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a IX-a M₂

Problema 1

Rezolvați sistemul :
$$\begin{cases} 2|x - y| + 3|x + 1| = 7 \\ 3|x - y| + 2|x + 1| = 8 \end{cases}$$

Problema 2

a) Demonstrați că numerele $\sqrt{5}, \sqrt{13}, \sqrt{21}$ nu pot fi termenii consecutivi ai unei progresii aritmetice.

b) Să se determine progresia aritmetică, cu proprietatea că suma primilor n termeni ai săi este dată de formula : $S_n = 5n^2 + 6n$.

Problema 3

a) Stabiliți valoarea de adevăr a propoziției : ” Numărul $n^2 + n + 41$ este prim pentru $(\forall)n \in \mathbb{N}^*$ ”.
Justificați răspunsul.

b) Demonstrați prin inducție matematică următoarea egalitate :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*.$$

.

Problema 4

Se consideră paralelogramul ABCD și punctele E și F astfel încat $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{FE}$.

Să se demonstreze că punctele A, F și C sunt coliniare.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.

Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a X-a M₂

Problema 1

- a) Arătați că numerele $p = \log_9 25 - \log_3 10 + \log_3 18$ și $q = 8^{\log_2 \sqrt[3]{5}}$ sunt întregi.
- b) Să se arate că următoarea expresie este constantă :

$$A = \frac{1}{\log_x 2 \cdot \log_x 4} + \frac{1}{\log_x 4 \cdot \log_x 8} - \frac{2}{3(\log_x 2)^2} .$$

Problema 2

- a) Determinați numărul real m pentru care numărul $z = 5i^5 + 4mi^4 + 3mi^3 + 2i^2 + mi$ este real.
- b) Să se determine $z \in \mathbb{C}$ știind că $\frac{\bar{z} + 7i}{z} = 6$.

Problema 3

- a) Fie funcțiile $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -3x + 9$ și $g(x) = (2m+1)x + 3$.
- Să se determine $m \in \mathbb{R}$, astfel încât $g = f^{-1}$, unde f^{-1} este inversa funcției f .
- b) Să se determine funcția putere $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ unde $n \in \mathbb{N}^*$, știind că $f(4) + f(2) = 20$.

Problema 4

- a) Arătați că dacă $p \in \mathbb{R}$ și $\sqrt{2p+6} = 4$, atunci $\sqrt[3]{5p+2} \in \mathbb{R}$
- b) Să se rezolve în \mathbb{R} ecuația irațională : $\sqrt[3]{x-3} + \sqrt[3]{11-x} = 2$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XI-a M₂

Problema 1

Determinați numerele reale a și b astfel încât să avem:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - ax - b) = \frac{3}{2}.$$

Problema 2

Să se calculeze determinantul: $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_4 & a_5 & a_6 \\ a_1 & a_1 & a_1 \end{vmatrix}$, știind că numerele a_1, a_2, \dots, a_9 sunt în progresie aritmetică.

Problema 3

Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{ax^2 + bx + 1}$, $a, b \in \mathbb{R}$

- a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât dreapta de ecuație $y = x - 2$ să fie asimptotă spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- b) Pentru $a = 1$ și $b = 2$, stabiliți dacă graficul funcției admite și alte asimptote.

Problema 4

Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, $a \in \mathbb{R}$

- a) Determinați matricele $A^2(1)$ și $A^3(1)$.
- b) Determinați inversa matricei $C = A(1)$.

Notă

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.



Olimpiada Națională de Matematică
Etapa locală -20.02.2016
Clasa a XII-a M₂

Problema 1

Fie $M = (0, \infty)$ și $a, b \in M$. Definim legea de compoziție $a \circ b = \ln(e^a + e^b - 1)$.

- Să se arate că M este parte stabilă a lui \mathbb{R} în raport cu legea \circ .
- Arătați că legea \circ este asociativă.

Problema 2

Fie $G = \left\{ \begin{pmatrix} 2x & 3y \\ y & 2x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R}, 4x^2 - 3y^2 = 1 \right\}$

Să se arate că G este grup comutativ în raport cu înmulțirea matricelor.

Problema 3

Fie $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2+1} dx, n \in \mathbb{N}^*$

- Calculați I_1 și I_2 .
- Arătați că $I_{n+2} + I_n = \frac{1}{n+1}, (\forall)n \in \mathbb{N}^*$

Problema 4

a) Determinați $a, b \in \mathbb{R}$, astfel încât funcția $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 1 & , x \leq 1 \\ x^3 + x^2 - 4x + b & , x > 1 \end{cases}$ să fie o primitivă pentru o funcție $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

b) Aflați funcția f .

- Timp de lucru efectiv 3 ore.
- Toate subiectele sunt obligatorii.
- Pentru fiecare problemă rezolvată corect se acordă 7 puncte.