TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a *Tehnologic*
09.12.2016

Filiera tehnologică: profilul servicii, profilul resurse, profilul tehnic toate calificările profesionale
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Verificați dacă $\hat{3}$ este soluția ecuației $\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1},\ x \in \mathbb{Z}_4$

5p **2.** Fie legea de compoziție $*: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x * y = x + y + xy$. Să se calculeze $5 * (-4)$

5p **3** Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compozitie $x * y = x + y + 2$. Să se determine elementul neutru al acestei legi.

5p **4.** Să se calculeze $\int_1^2 \frac{2x^2+x+1}{x} dx$.

5p **5.** Să se calculeze $\int \frac{lnx}{x} dx$.

5p **6.** Fie funcțiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = e^x + 3x^2 + 2, F(x) = e^x + x^3 + 2x - 1$. Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f .

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

5p **a)** Să se arate că $x * y = (x-5)(y-5) + 5, \forall x, y \in R$.

5p **b)** Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x = x$.

5p **c)** Să se calculeze $1 * 2 * 3 * \ldots * 2017$.

2. Se dă mulțimea $G = \left\{ A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x-1 \\ 0 & x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}^* \right\}$

5p **a)** Arătați că $I_2 \in G$

5p **b)** Să se verifice că $A(x) \cdot A(y) = A(xy)$, $(\forall) x, y \in \mathbb{R}^*$;

5p **c)** Calculați $A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(5)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + x + 3\sqrt{x}$

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 3\sqrt{x}) d(x) = \frac{23}{6}$

5p **b)** Determinați primitiva funcției $f(x)$,pentru care $F(0) = 1$

5p **c)** Arătați că orice primitivă a funcției$f(x)$ este crescatoare pe $(0, \infty)$.

2. Se consideră integralele $I_n = \int_1^2 x^n e^x dx$, $n \in \mathbb{N}$.

5p **a)** Să se calculeze I_0.

5p **b)** Să se determine I_1.

5p **c)** Să se arate că $I_n + nI_{n-1} = 2^n e^2 - e$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I
Clasa a XII-a Ştiinţe ale naturii
09.12.2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Ştiinţe ale naturii
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se rezolve ecuația $\hat{2}x + \hat{3} = \hat{1}, x \in \mathbb{Z}_4$.

5p **2.** Fie legea de compoziție $\circ : \mathbb{C} X \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \circ y = x + y - 2i$, calculați $(i+2) \circ (i-1)$.

5p **3.** Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție „$*$” definită prin $x * y = xy - 2x - 2y + 6, \forall x, y \in \boldsymbol{R}$. Știind că legea admite pe 3 ca element neutru, determinați simetricul lui 5 în raport cu legea dată.

5p **4.** Calculați: $\int_1^2 \frac{2x^5 - 5x^2 + 7}{x^3} dx$.

5p **5.** Arătaţi că funcția $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, F(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} arctg \frac{x}{\sqrt{3}}$ este o primitivă a funcţiei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x^2+3}$$

5p **6.** Să se calculeze $\int \frac{lnx}{x(1+ln^2x)} dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Pe $\mathbb{R}$ se consideră legea de compoziţie : $x * y = xy + 7x + 7y + 42, \forall x, y \in R$.

5p **a)** Să se demonstreze egalitatea $x * y = (x+7)(y+7) - 7, \forall x, y \in R$

5p **b)** Să se rezolve ecuaţia $x * (x+1) = -7, x \in R$.

5p **c)** Să se calculeze $(-9) * (-8) * \cdots * 8 * 9$.

2. Se consideră matricea $A_x = \begin{pmatrix} 2016^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & x & 1 \end{pmatrix}$, pentru $x \in \mathbf{R}$ şi mulţimea

$$G = \{A_x | x \in \mathbf{R}\} \subset M_3(\mathbf{R}).$$

5p **a)** Să se verifice că $I_3 \in G$, unde $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

5p **b)** Să se demonstreze că $A_x \cdot A_y = A_{x+y}, \forall x, y \in \mathbf{R}$.

5p **c)** Să se arate că $(G, \cdot)$ este grup comutativ.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1}, pentru\ x \le 0 \\ -2x+1, pentru\ x > 0 \end{cases}$

5p **a)** Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că primitiva *F(x)* a functiei *f(x)* este strict crescatoare pe (-∞,0)

5p **c)** Determinați acea primitivă $F_1(x)$ a lui *f(x)* care indeplineste conditia $F_1(0) = 1$.

2. Se consideră funcția $f: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, f(x) = (3x+1)e^x$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 \frac{1}{e^x} f(x)dx = \frac{5}{2}$

5p **b)**Determinați numărul real *m*, pentru care funcția $F: \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}, F(x) = (3x+m)e^x$este o primitivă
. a functiei *f*.

5p **c)** Determinați numărul real nenul *a*, știind că $\int_0^a f(x)dx = 3a$.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

TEZĂ LA MATEMATICĂ PE SEMESTRUL I

Clasa a XII-a *Matematică-informatică*
09.12.2016

Filiera teoretică, profilul real, specializarea Matematică-informatică.
• Toate subiectele sunt obligatorii. Timpul efectiv de lucru este de 3 ore.
• La toate subiectele se cer rezolvări complete. Se acordă 10 puncte din oficiu.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Să se calculeze $\hat{4}^{2016}$ în Z_5.

5p **2.** Pe mulţimea $M=(0,\infty)\setminus\{1\}$ se consideră legea de compoziţie $x*y=x^{5\ln y}, \forall x,y\in M$
Calculaţi $2*e+e*2$.

5p **3.** Pe mulţimea numerelor întregi se consideră legea de compoziție $*: Z\to Z$, $x*y=xy-5x-$
$-5y+30$, cu elementul neutru $e=6$. Arătați că 1 nu are simetric în raport cu legea dată.

5p **4.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{5} & ,x\le 0\\ x\cdot \cos x+\frac{1}{5}, x>0\end{cases}$. Arătaţi că funcţia f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

5p **5.** Calculaţi $\int_0^1 \frac{x^2}{2-x^2}dx$.

5p **6.** Calculaţi $\int \sin^3 x\cdot \cos^2 x\, dx$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră legea de compoziție$\circ$: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\circ y=2xy-x-y+1, \forall x,y\in R$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}, \forall x,y\in R$.

5p **b)** Ştiind că legea "$\circ$" este asociativă, calculaţi $\left(-\frac{1}{7}\right)\circ\left(-\frac{1}{6}\right)\circ....\circ\left(\frac{1}{6}\right)\circ\left(\frac{1}{7}\right)$.

5p **c)** Pe mulţimea numerelor reale, rezolvaţi ecuaţia $x\circ x\circ x\circ x=13$.

2. Se consideră mulţimea M=$\left\{A(x)\in M_3(R)/A(x)=\begin{pmatrix}1 & 0 & x\\ -x & 1 & -\frac{x^2}{2}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, x\in R\right\}$

5p **a)** Arătaţi că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$, x *şi* $y\in R$.

5p **b)** Să se arate că $(A(x))^{-1}\in M$ pentru orice $A(x)\in M$

5p **c)** Demonstraţi că grupurile $(M,\cdot)$şi $(R,+)$ sunt izomorfe.

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:(1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{1}{x(1+\ln x)}$.

5p **a)** Să se determine o primitivă F a lui f cu proprietatea că $F(e^{e-1})=2$.

5p **b)** Demonstraţi că orice primitivă a funcţiei f este strict crescătoare pe intervalul $(1,\infty)$.

5p **c)** Să se calculeze suma $F(\sqrt{e})+F(\sqrt[3]{e})+F(\sqrt[4]{e})+.....+F(\sqrt[11]{e})$, unde F este determinată la punctul a.

2. Se consideră $a\in\mathbb{R}$ şi funcţiile $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f_a(x)=\frac{x^3-3x+a}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ şi $F_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$,

$F_a(x)=\dfrac{x^2+ax+5}{\sqrt{x^2+1}}$

5p **a)** Să se arate că funcția F_a este o primitivă a funcției f_a, $\forall a\in\mathbb{R}$

5p **b)** Să se calculeze $\int_1^2 f_2(x)dx$

5p **c)** Să se calculeze $\int f_1(x)F_1^2(x)dx$

Calea 13 Septembrie, nr 209,
Sector 5, 050722, București
Tel: +40 (0)21 317 36 50
Fax: +40 (0)21 317 36 54